

LIBRIS

We know
books
Marin Chirciu

INEGALITĂȚI GEOMETRICE

DE LA INIȚIERE LA PERFORMANȚĂ



Cuprins

	Soluții
Capitolul 1 – Principiul trinomului de gradul al doilea și al sumelor de pătrate. Metoda SOS.....	7 132
Capitolul 2 – Principiul dualității. Substituțiile lui Ravi	19 151
Capitolul 3 – Inegalitatea lui Bergström; Cauchy–Buniakovski–Schwarz	25 161
Capitolul 4 – Inegalitatea lui Hölder	47 188
Capitolul 5 – Inegalitățile lui Mitrinovič.....	53 194
Capitolul 6 – Inegalitatea lui Cebîșev.....	58 201
Capitolul 7 – Inegalitatea lui Schur	64 210
Capitolul 8 – Convexitate. Inegalitatea lui Jensen. Inegalitatea lui Popoviciu	68 216
Capitolul 9 – Inegalitatea lui Euler. ($R \geq 2r$)	79 229
Capitolul 10 – Inegalitatea mediilor.....	90 245
Capitolul 11 – Inegalitatea lui Gerretsen. ($16Rr - 5r^2 \leq p^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2$) ...	110 267
<i>Bibliografie</i>	294
<i>Decalogul profesorului</i>	296

capitolul

1

Principiul trinomului de gradul
al doilea și al sumelor de pătrate.
Metoda SOS

„Cultura generală este ceea ce îți rămâne după ce ai uitat tot ceea ce ai învățat.”

Grigore Moisil (1906–1973)

Sunt adevărate afirmațiile:

$$a^2 \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = 0.$$

$$(a - b)^2 \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}, \text{ cu egalitate pentru } \Delta = 0 \text{ și } x = \frac{-b}{2a}.$$

$$a \leq x \leq b \Leftrightarrow (x - a)(x - b) \leq 0, \text{ cu egalitate dacă } x = a \text{ sau } x = b.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca), \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc, \forall a, b, c \geq 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq a + b + c, \forall a, b, c > 0 \text{ și } abc = 1, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c = 1.$$

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9, \forall a, b, c > 0, \text{ cu egalitate pentru } a = b = c.$$

În continuare sunt propuse aplicații ce pot fi rezolvate folosind inegalitățile de mai sus.

Să se arate că în orice triunghi ABC au loc următoarele inegalități:

$$1.1. \text{ a) } \cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C \geq \frac{3}{4}.$$

OL 1983, Galați

$$\text{b) } \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}.$$

$$1.2. \ a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2.$$

Inegalitatea lui LEIBNIZ

$$1.3. 2 \cos A + \sqrt{3} \left(\cos \frac{A-B}{3} + \cos \frac{A-C}{3} \right) + 3 \left(\sin \frac{A-B}{3} + \sin \frac{A-C}{3} \right) \leq 5.$$

Concursul „Traian Lalescu”, 1987

$$1.4. 2(\sin B + \sin C) \leq 3 + 2 \cos A.$$

$$1.5. a b \sin^2 A + b c \sin^2 B + c a \sin^2 C \leq p^2.$$

GM 2/1984, Marcel Chiriță, București

$$1.6. \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}.$$

Mitrinović, 1965

$$1.7. \cos A \cos B \cos C \leq \frac{1}{8}.$$

GMF-B 1/1961, soluție Toma Albu

$$1.8. 3a^2 + 3b^2 - c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$$

1.9. Pe laturile AB, BC, CA ale $\triangle ABC$ se consideră punctele M, N, P astfel încât segmentele AM, BN, CP să fie congruente.

a) Să se afle minimul ariei $\triangle MNP$.

b) În cazul când $\triangle ABC$ este echilateral, să se arate că minimul ariei $\triangle MNP$ este egal cu un sfert din aria $\triangle ABC$.

1.10. Fie ABC un triunghi oarecare.

a) Să se determine un punct M pe mediana AA' , astfel ca expresia $MA^2 + MB^2 + MC^2$ să fie minimă.

b) Să se arate că $GA^2 + GB^2 + GC^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}$.

1.11. a) Să se determine un punct P situat pe înălțimea AD a unui triunghi ascuțitunghic ABC astfel ca expresia $PA^2 + PB^2 + PC^2$ să fie minimă.

b) Să se determine un punct P situat pe bisectoarea AA' a triunghiului ABC astfel încât expresia $PA^2 + PB^2 + PC^2$ să fie minimă.

Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile :

$$1.12. 2R(h_a + h_b + h_c) \leq a^2 + b^2 + c^2.$$

OL Constanța 1985, Ion Cucurezeanu

$$1.13. ab + bc + ca \leq \frac{4p^2}{3}.$$

$$1.14. bc \sin^2 \frac{A}{2} + ca \sin^2 \frac{B}{2} + ab \sin^2 \frac{C}{2} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

1.15. a) Să se arate că nu există niciun triunghi pentru care să existe inegalitatea:

$$4S\sqrt{3} > a^2 + b^2 + c^2.$$

GMB, vol. III, nr. 2/oct 1897

Roland Weitzenböck, 1919

b) $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4S\sqrt{3}.$

$$1.16. a \operatorname{ctg} \frac{A}{2} + b \operatorname{ctg} \frac{B}{2} + c \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \leq \frac{2p^2}{3r}.$$

1.17. a) $\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} + \sin^2 \frac{C}{2} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{4abc}$.

b) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

c) $\cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

d) $\sin A \sin B \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

e) $\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

f) $\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\sin B} + \frac{1}{\sin C} \geq 2\sqrt{3}$.

1.18. $\frac{a^2}{p^2(p-a)} + \frac{b^2}{p^2(p-b)} + \frac{c^2}{p^2(p-c)} \leq 2$.

GM 8/1988, Francz Adalbert, Arad

1.19. $\sin^2 B \sin^2 C \geq 2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2)$.

GM 3/1990, Bogdan Trentea, București

1.20. a) $p \geq \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{bc}$.

GM 12/1969

b) $\sqrt{(p-a)(p-b)} + \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{(p-c)(p-a)} \leq p$.

RM. Galați 9/1990, Gheorghe Tutulan

1.21. $\frac{2a}{2p-a} + \frac{2b}{2p-b} + \frac{2c}{2p-c} \geq 3$.

GM 12/1977, C.C. Nistorescu, Pitești

1.22. $\operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1$.

1.23. $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{2Rr}$.

1.24. a) $m_a \geq \frac{1}{2} \sqrt{a(8p-9a)}$.

GM 6/1985, Matematika v škole (URSS), Matematika (Bulgaria)

b) $m_a \geq \frac{b+c}{2} \cos \frac{A}{2}$.

GM 4/1987, Mircea Lascu, Zalău

c) $m_a \geq \sqrt{p(p-a)}$ și analogele.

d) $m_a \geq p \sqrt{1 - \frac{2r}{h_a}}$.

Mathlinks, 2012

e) $m_a \geq \frac{b^2 + c^2}{4R}$.

f) $m_a \geq R \sin |B - C|$.

Olimpiada de matematică 1987, Argeș

g) $4m_b m_c \leq 2a^2 + bc$.

h) $m_a m_b m_c \geq pS$.

i) $m_a m_b m_c \geq 3p^2$.

j) $m_a m_b m_c \geq r_a r_b r_c$.

RMT 1/1978, Titu Andreescu, Timișoara

k) $\frac{m_a^2}{1 + \cos A} + \frac{m_b^2}{1 + \cos B} + \frac{m_c^2}{1 + \cos C} \geq 9Rr$.

GM 2/2009, Florin Stănescu, Găești

$$1) m_a \cos \frac{A}{2} + m_b \cos \frac{B}{2} + m_c \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3}{4}(a+b+c).$$

$$m) 2R(m_a + m_b + m_c) \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Olimpiada de matematică 1989 Constanța, Ion Cucurezeanu

$$1.25. a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

GM 3/1965, OIM 1964, Moscova

$$1.26. \sqrt{a} \cos \frac{A}{2} + \sqrt{b} \cos \frac{B}{2} + \sqrt{c} \cos \frac{C}{2} \geq \frac{3\sqrt{abc}}{2R}.$$

$$1.27. a) \frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3.$$

GMF-B 1/1961, Viorel Gh. Vodă, elev, București

$$b) (h_a r_a^2)^n + (h_b r_b^2)^n + (h_c r_c^2)^n \geq 3(h_a h_b h_c)^n, \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

GMF-B 1/1961, Viorel Gh. Vodă, elev, București

$$c) (h_a^2 r_a)^n + (h_b^2 r_b)^n + (h_c^2 r_c)^n \geq 3(h_a h_b h_c)^n, \text{ unde } n \in \mathbb{N}.$$

Inemath 2/2015

$$1.28. 3(a^3 + b^3 + c^3 + 3abc) \leq 4p(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$1.29. a) 3\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

$$b) 3\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

$$c) 2\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + 3.$$

$$1.30. a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

OIM 1983, propusă de SUA

$$1.31. a) a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{4}{3}p^2.$$

$$b) a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35}\left(p^2 + \frac{abc}{p}\right).$$

American Mathematical Monthly 1971, J. F. Darling-W. Moser

$$1.32. a) \sqrt{a^2 - (b-c)^2} \leq a.$$

$$b) 8(p-a)(p-b)(p-c) \leq abc.$$

$$c) abc < a^2(p-a) + b^2(p-b) + c^2(p-c) \leq \frac{3}{2}abc.$$

O. Bottema, cdp

$$1.33. 4(a+b)(b+c)(c+a) \leq 8p^3 + 5abc.$$

Cardinal 4/1991

$$1.34. a) \frac{bc}{b+c-a} + \frac{ca}{c+a-b} + \frac{ab}{a+b-c} \geq a+b+c.$$



$$b) \frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{c+a-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

1.35. a) Fie a, b, c lungimile laturilor unui ΔABC . Arătați că:

$$\sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} + \sqrt{a+b-c} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Asian Pacific Mathematical Olympiad 1996

b) În ΔABC notăm $x = \sqrt{b+c-a}, y = \sqrt{c+a-b}, z = \sqrt{a+b-c}$. Arătați că:

$$(x+y)(y+z)(z+x) \leq 8\sqrt{abc}. \quad \text{Dezvoltare M. Chirciu}$$

1.36. În ΔABC medianele BB' și CC' sunt perpendiculare. Arătați că:

$$a) b^2 + c^2 = 5a^2. \quad b) 5(b^2 + c^2 - a^2) \geq 8bc.$$

$$c) \text{ctg } B + \text{ctg } C \geq \frac{2}{3}.$$

A.M.M. 1965, S. Reich

$$d) \cos A \geq \frac{4}{5}$$

Matematika v Skole, URSS

Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile :

$$1.37. \cos^2 \frac{B-C}{2} \geq \frac{2r}{R}.$$

$$1.38. \text{ctg } \frac{A}{2} \geq 1 + \text{ctg } A.$$

$$1.39. \text{ctg } \frac{A}{2} + \text{ctg } \frac{B}{2} + \text{ctg } \frac{C}{2} \leq 3(\text{ctg } A + \text{ctg } B + \text{ctg } C).$$

$$1.40. a) \sqrt{3}(\sin A + \sin C) - \cos B \leq \frac{5}{2}.$$

GM 11/2008, Benedict G. Niculescu, București

$$b) \sqrt{3}(\sin A - \sin C) + \cos B \leq \frac{5}{2}.$$

$$c) \sqrt{n}(\sin A + \sin C) - \cos B \leq \frac{n+2}{2}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$d) \sqrt{n}(\sin A - \sin C) + \cos B \leq \frac{n+2}{2}, \text{ unde } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$e) \sqrt{m}(\sin A + \sin B) - \cos C \leq \frac{m+2}{2}, \text{ unde } m \geq 0.$$

Dezvoltări M. Chirciu

$$1.41. a) l_a + l_b + l_c \leq m_a + m_b + m_c.$$

$$b) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2).$$

$$c) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq p^2.$$

GM 1/2011, Florin Rotaru, Focșani

$$d) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 \geq 3S\sqrt{3}.$$

$$e) m_a + m_b + m_c \leq \frac{3}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cardinal 1/1990

$$f) l_a + l_b + l_c \leq \frac{3}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

$$g) l_a \leq \sqrt{p(p-a)}.$$

$$h) l_a + l_b + l_c \leq p\sqrt{3}.$$

$$i) m_a l_a \geq p(p-a).$$

Tabăra de Matematică, Băile Herculane 1986

$$j) m_a + l_a \geq 2\sqrt{p(p-a)}.$$

GM 12/1982, Gheorghe Stoica, student, București

$$k) \frac{m_a}{l_a} \geq \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2bc}} \geq 1.$$

GM 9/2003, Traian Tămăian, Carei, Satu Mare

$$l) \frac{m_a}{h_a} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S\sqrt{3}}.$$

$$m) r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2.$$

$$n) m_a l_a \geq r_b r_c.$$

$$o) m_a l_a + m_b l_b + m_c l_c \geq p^2.$$

GM 5/1980, Laurențiu Panaitopol, București

$$p) m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + l_a^2 + l_b^2 + l_c^2 \geq 2p^2.$$

$$r) \frac{m_a}{l_a} \geq \frac{(b+c)^2}{4bc} \geq 1.$$

G. Tsintsifas, 1975

$$s) \frac{m_a}{h_a} \geq \frac{b^2 + c^2}{2bc} \geq 1.$$

G. Tsintsifas, 1975

$$t) \frac{m_a}{l_a} \leq \frac{b^2 + c^2}{2bc} \text{ (în } \triangle ABC \text{ ascuțitunghic)}.$$

G. Tsintsifas, 1975

$$u) \frac{m_a}{l_a} + \frac{m_b}{l_b} + \frac{m_c}{l_c} \leq \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc} \text{ (în } \triangle ABC \text{ ascuțitunghic)}.$$

GM 10-11-12/1990, Mircea Lascu, Zalău

1.42. Dacă în $\triangle ABC$ are loc relația $2b^2 = a^2 + c^2$, demonstrați inegalitatea:
 $\text{ctg}^2 B \geq \text{ctg} A \text{ctg} C.$

Baltic Way 1997

Să se arate că în orice triunghi au loc inegalitățile :

$$1.43. \sqrt{Rr} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

GM 12/2006, Laura Molea și Gh. F. Molea, Curtea de Argeș

$$1.44. \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{p}{3Rr}.$$

$$1.45. a) ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr.$$

$$b) a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr).$$

$$c) a^3 + b^3 + c^3 = 2p(p^2 - 3r^2 - 6Rr).$$

$$d) \frac{bc}{p-a} + \frac{ca}{p-b} + \frac{ab}{p-c} \geq 2(4R+r).$$

RM Galați, 33/2009, Oleh Faynshteyn, Leipzig, Germania

1.46. Dacă în $\triangle ABC$ are loc egalitatea $\sqrt{r_a} + \sqrt{r_b} + \sqrt{r_c} = \frac{\sqrt{r_a r_b r_c}}{r}$ atunci triunghiul este echilateral.

RMT 1/1974, Titu Andreescu, Timișoara

1.47. $\frac{1}{h_a^2} + \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2} \geq \frac{1}{3r^2}$.

RMT 2/1977, Titu Andreescu, Timișoara

1.48. a) $p\sqrt{3} \leq 4R + r$.

b) $p^2 \leq 8R^2 - 2Rr - r^2$.

c) $ab + bc + ca = p^2 + r^2 + 4Rr$.

d) $\frac{2S}{a} + \frac{2S}{b} + \frac{2S}{c} = \frac{p^2 + r^2 + 4Rr}{2R}$.

e) $h_a + h_b + h_c \leq 4R + r$.

1.49. Fie $\triangle ABC$ dreptunghic în A , cu catete de lungimi b, c și h lungimea înălțimii corespunzătoare ipotenuzei BC , unde $BC = a$. Să se arate că:

$$\frac{h}{b+c-a} \leq \frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

GM 7-8/1998, Viorel Iulian Cornea, Hunedoara

Viorel Gh. Vodă

1.50. a) $r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 \geq p^2$.

b) $\frac{r_a}{r_b + r_c} + \frac{r_b}{r_c + r_a} + \frac{r_c}{r_a + r_b} \leq \frac{R}{r} - \frac{1}{2}$.

GM 7-8/1997, Marian Ursărescu, Roman

1.51. $l_a + l_b + l_c \geq 2S \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$.

RMT 4/2009, Petru Vlad, Sibiu

1.52. $\frac{1}{l_a} + \frac{1}{l_b} + \frac{1}{l_c} \leq \frac{1}{r}$.

RM Astra Sibiu, 3/1990

1.53. a) $R \geq \frac{b^2 + c^2}{2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$.

Baltic Way, 1998

b) $R \geq \frac{b^2 + c^2}{2\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} \geq \frac{a}{2}$.

c) $R \geq \frac{b^2 + c^2}{4m_a} \geq \frac{a}{2}$.

d) $2p \leq \sum \frac{b^2 + c^2}{\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}} \leq 6R$.

e) $4p \leq \sum \frac{b^2 + c^2}{4m_a} \leq 12R$.

f) $am_a + bm_b + cm_c \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 2R(m_a + m_b + m_c)$.

g) $am_a + bm_b + cm_c \leq 2(p^2 - r^2 - 4Rr) \leq 2R(m_a + m_b + m_c)$.

Dezvoltări M. Chirciu

Feuerbach, 1822

1.54. a) $r_a + r_b + r_c = 4R + r$.

b) $r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$.

c) $r_a + r_b + r_c \geq p\sqrt{3}$.

1.55. $p \geq \sqrt{(p-b)(p-c)} + \sqrt{bc}$.

$$1.56. m_a^4 + m_b^4 + m_c^4 \leq 3 \left(\frac{3R}{2} \right)^4.$$

RM Galați, 9/1990 Lucian Tiberiu Olteanu, Cluj-Napoca

$$1.57. a) \frac{m_a l_a}{h_a} + \frac{m_b l_b}{h_b} + \frac{m_c l_c}{h_c} \geq r_a + r_b + r_c.$$

MateForum 2009, C. Mateescu, Pitești

$$b) \frac{m_a l_a}{r_a} + \frac{m_b l_b}{r_b} + \frac{m_c l_c}{r_c} \geq r_a + r_b + r_c.$$

Dezvoltare, M. Chirciu

1.58. Pentru numerele reale x, y, z satisfăcând $x + y + z = 0$, în orice triunghi cu semiperimetrul p , există inegalitatea:

$$yza(p-a) + zxb(p-b) + xyc(p-c) \leq 0,$$

cu egalitate dacă și numai dacă $x = y = z = 0$.

GMA, 2/2001, Vasile Cârtoaje, Departament of Automation and Computers University "Oil and Gas" of Ploiești.

1.59. a) Pentru numerele reale x, y, z arbitrare, în orice triunghi există inegalitatea:

$$(ya^2 + zb^2 + xc^2)(za^2 + xb^2 + yc^2) \geq (xy + yz + zx)(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2),$$

cu egalitate dacă și numai dacă $\frac{x}{a^2} = \frac{y}{b^2} = \frac{z}{c^2}$.

GMA, 2/2001, Vasile Cârtoaje, Departament of Automation and Computers University "Oil and Gas" of Ploiești.

$$b) a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

I. M. O., Paris 1983, propusă de U.S.A.

$$c) a^m b(a-b) + b^m c(b-c) + c^m a(c-a) \geq 0, \text{ unde } m \geq 2.$$

Vasile Cârtoaje

$$d) 3 \left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \right) \geq (a^2 + b^2 + c^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right),$$

Inegalitatea lui Walker

$$e) a^2(b+c-a) + b^2(c+a-b) + c^2(a+b-c) \leq 3abc.$$

Math. Mag. 43, 1970

I.M.O., 1964

1.60. Să se arate că dacă în $\triangle ABC$ are loc inegalitatea:

$$a^4 \geq b^4 - b^2c^2 + c^4, \text{ atunci } m(A) \geq 60^\circ.$$

Olimpiada Județeană de Matematică, 1989

1.61. Să se arate că dacă în $\triangle ABC$ are loc inegalitatea:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{m_c}, \text{ atunci } m(C) \geq 120^\circ.$$

1.62. Să se arate că într-un triunghi dreptunghic cu ipotenuza de lungime a și catetele b, c există inegalitatea:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{ab+bc+ca} \geq \sqrt{2}.$$

Computer Matematica 1/1996, Ștefan Tache, Câmpina

$$1.63. 0 \leq m_a^2 - l_a^2 \leq \frac{(b-c)^2}{2}.$$

Mathematical Reflections, 2/2007, Titu Andreescu, U.S.A.

$$1.64. a) 4a^2 + b^2 + c^2 \geq 8m_b m_c. \quad b) \sqrt{4a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{2}(m_b + m_c).$$

$$c) \sqrt{4a^2 + b^2 + c^2} + \sqrt{4b^2 + c^2 + a^2} + \sqrt{4c^2 + a^2 + b^2} \geq 2\sqrt{2}(m_a + m_b + m_c).$$

GM 2/2007, Ovidiu Țățan, Rm.Sărat, Buzău

$$1.65. a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Olimpiada de matematică RUSIA 2001

$$1.66. \frac{9}{2(a+b+c)} \leq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} < \frac{5}{a+b+c}.$$

GM 2/2012, Adriana Dragomir și Lucian Dragomir, Oțelu Roșu

$$1.67. a) \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} < 2p.$$

$$b) \sqrt{\sin A \sin B} + \sqrt{\sin B \sin C} + \sqrt{\sin C \sin A} < \frac{S}{Rr}.$$

$$c) (a+b)(b+c)(c+a) > 4RS.$$

$$d) ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) > 3abc.$$

GB 5/1978 Ion Nămuți și Valeriu Drulă, Motru

$$1.68. a) \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} - 2 > \frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}. \quad \text{GM 3/1974, Gh. Bostan, Urziceni}$$

$$b) \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} + \frac{1}{1+a+b+c} \geq 1. \quad \text{GM 3/1974, Ilie Diaconu, Tg.Jiu}$$

1.69. a) Dacă într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c există relația:

$$2(ab^2 + bc^2 + ca^2) = a^2b + b^2c + c^2a + 3abc.$$

atunci triunghiul este echilateral.

Brazilian Mathematical Olympiad IMO Test Selection Team 2000

b) Dacă într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c există relația:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc = ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

atunci triunghiul este echilateral.

c) Dacă într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c există relația:

$$2a^3 + 3b^2c + 4ab^2 = 2b^2c + 3a^2b + 4abc.$$

atunci triunghiul este echilateral.

d) Dacă într-un triunghi cu laturile de lungimi a, b, c există relația:

$$a^3 + 2b^3 + 3bc^2 + ac^2 = c^3 + a^2b + a^2c + 4b^2c.$$

atunci triunghiul este echilateral.

Dezvoltări M. Chirciu

1.70. Dacă în $\triangle ABC$ avem $A = 2B$ să se demonstreze relația:

$$a^2 = b(b+c).$$

Olimpiada de Matematică INDIA 1992

1.71. a) $\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$.

b) $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2}$.

GM 8/1988, Laszlo Baloy, Baia Mare

c) $\frac{1}{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2}} \geq 12$.

d) Să se arate că în orice $\triangle ABC$ neobtuzunghic are loc inegalitatea:

$$\sin \frac{A}{2} \leq \frac{a}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}}.$$

RMT 1/1987, Mircea Lascu, Zalău

1.72. Să se demonstreze că în orice triunghi neobtuzunghic are loc inegalitatea:

$$2(R+r) \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

GM 11/1993, I. Nanu și I. Pătrașcu, Craiova

1.73. a) $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right)$.

Mathlinks 2013

b) $\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2} + \frac{3}{4R^2} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

Mathlinks 2013

1.74. $\frac{1}{a^2 + ab + b^2} + \frac{1}{b^2 + bc + c^2} + \frac{1}{c^2 + ca + a^2} \leq \frac{h_a h_b + h_b h_c + h_c h_a}{8S^2}$.

RMG 11/1992, C. Dragomir, Pitești

1.75. a) $\frac{2a-b}{2b+c-a} + \frac{2b-c}{2c+a-b} + \frac{2c-a}{2a+b-c} \geq \frac{3}{2}$.

Dan Coma, Vădăstrița

b) $\frac{na-b}{nb+c-a} + \frac{nb-c}{nc+a-b} + \frac{nc-a}{na+b-c} \geq \frac{3(n-1)}{n}$, unde $n \geq 1$.

Dezvoltare, M. Chirciu

1.76. a) Să se arate că în orice triunghi ABC există inegalitatea:

$$S \leq \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

b) Să se arate că dacă într-un triunghi ABC există egalitatea:

$$S = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

atunci triunghiul este dreptunghic isoscel.

Matematica în liceu, Craiova 1991

1.77. a) $\text{ctg } A \text{ctg } B + \text{ctg } B \text{ctg } C + \text{ctg } C \text{ctg } A = 1$.

b) $\text{ctg}^2 A + \text{ctg}^2 B + \text{ctg}^2 C \geq 1$.

$$c) \operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1.$$

$$d) \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{B}{2} + \operatorname{tg}^2 \frac{C}{2} \geq 1.$$

1.78. a) Să se arate că în orice triunghi ABC există inegalitatea:

$$(a-b)(a+h_a-b-h_b) \geq 0.$$

b) Să se arate că dacă $a \geq b$, atunci $a+h_a \geq b+h_b$.

c) Dacă în triunghiul ABC avem $a \geq b$ să se arate că $\sqrt{a} + \sqrt{h_a} \geq \sqrt{b} + \sqrt{h_b}$.

Revista de Matematică din Suceava 2/1992, Lucian Tuțescu, Craiova

1.79. a) Dacă $x, y, z > 0$ și $x+y+z=1$ să se arate că:

$$\sum \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + 6 \geq 2\sqrt{2} \sum \sqrt{\frac{1-x}{x}}.$$

Junior Balcanic Mathematical Olympiad, 2012

b) Să se arate că în orice $\triangle ABC$ există inegalitatea:

$$\sum \left(\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_a} \right) + 6 \geq 2\sqrt{2} \sum \sqrt{\frac{h_a-r}{r}}.$$

c) Să se arate că în orice $\triangle ABC$ există inegalitatea:

$$\sum \left(\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_a} \right) + 6 \geq 2\sqrt{2} \sum \sqrt{\frac{r_a-r}{r}}.$$

Dezvoltări, M. Chirciu

$$1.80. a) a^2 \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{4R^2} \right) - 4 \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \geq \frac{a}{R}.$$

b) Dacă în triunghiul ABC există inegalitatea:

$$a^2 \left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{4R^2} \right) - 4 \sin \left(\frac{A}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \sin \left(\frac{A}{2} - \frac{\pi}{6} \right) \leq \frac{a}{R},$$

atunci triunghiul este dreptunghic isoscel.

Olimpiada Locală de Matematică 1993, Dolj, Dan Seclăman, Craiova

1.81. Să se arate că în $\triangle ABC$, dreptunghic în A , are loc inegalitatea:

$$\frac{ap}{bc} \geq 1 + \sqrt{2}.$$

Tabăra Națională de Matematică, 1982, I. V. Maștei și C. Stoica

1.82. Să se arate că în $\triangle ABC$, dreptunghic în A , are loc inegalitatea:

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} \geq 2\sqrt{2}.$$

RMT 2/1985, Dan Ștefan Marinescu, Hunedoara

$$1.83. \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a+b+c} > 3r.$$

GM 7-8/1987, Mariana Mirică, Costești, Argeș

1.84. $\sqrt{3(ab+bc+ca)} \leq \sum a(\cos B + \cos C) \leq \sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$.

Artur Bălăucă, Botoșani

1.85. $a^2 + b^2 + R^2 \geq c^2$.

100 Problems

1.86. a) Dacă $x, y, z > 0$ arătați că:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) \geq 3 + 4\left(\frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}\right) \geq 9.$$

b) Să se arate că în orice ΔABC există inegalitățile:

1) $\frac{p^2+r^2+4Rr}{2Rr} \geq 3 + \frac{8(p^2-r^2-Rr)}{p^2+r^2+2Rr} \geq 9$.

2) $\frac{4R+r}{r} \geq 3 + \frac{p^2+r^2-8Rr}{Rr} \geq 9$; 3) $\frac{4R+r}{r} \geq 3 + \frac{4(4R+r)^2-8p^2}{p^2r} \geq 9$.

Octogon Math. Magazine 2/2016, M. Bencze, Brașov și Xhao Changjian, China

1.87. a) Dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$ și $\alpha \leq \frac{1}{2}$ arătați că:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx + \alpha[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2].$$

b) Dacă $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ arătați că în orice ΔABC există inegalitățile:

1) $p^2 \geq 3r(4R+r) + \alpha \sum (a-b)^2$; 2) $(4R+r)^2 \geq 3p^2 + \alpha \sum (r_a - r_b)^2$

3) $(p^2+r^2+4Rr)^2 \geq 24p^2Rr + 4\alpha R^2 \sum (h_a - h_b)^2$

Octogon Mathematical Magazine 1/2017, M. Bencze, Brașov

1.88. a) Dacă $x, y, z > 0$ și $x+y+z=1$ arătați că:

$$3xyz + 2(xy + yz + zx)^2 \leq xy + yz + zx.$$

GM 11/2014, Traian Tămâian, Carei, Satu Mare

b) Să se arate că în orice ΔABC există inegalitățile:

1) $1 + \left(\frac{4R+r}{p}\right)^2 \leq \frac{2R}{r}$; 2) $3r^2 + \frac{(p^2+r^2+4Rr)^2}{4Rp^2} \leq \frac{p^2+r^2+4Rr}{2R}$.

Dezvoltări, M. Chirciu

1.89. a) Dacă $x, y, z > 0$ și $x+y+z=3$, arătați că: $xyz + \frac{12}{xy+yz+zx} \geq 5$.

b) Să se arate că în orice ΔABC există inegalitățile:

1) $\frac{27Rr}{p^2} + \frac{4p^2}{3r(4R+r)} \geq 5$; 2) $\frac{27Rr}{p^2} + \frac{16p^2}{3(p^2+r^2+4Rr)} \geq 5$.

M. Chirciu, 2015